Module	Contrôle	Durée	Cycle	Groupe	Date
Complément de Formation	Continu	1H30	Secondaire	3	20 Avril 2018

Exercice 1 — Restitution du cours - 6 points

1. Montrer que toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.
2. Montrer que toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.
3. On considére une fonction f continue sur $[a;b]$,$(a<b)$. Soient x_1,x_2,...,x_n des nombres de $[a;b]$. Montrer que :

$$(\exists\alpha\in[a;b])\ f(\alpha)=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}f(x_i)}{n}$$

Exercice 2 — La Continuité - 6 points

1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(1)\geq 0$.
   Montrer que $(\exists c\in[0;1])\ \ f(c)=\dfrac{1-c}{c^2}$
2. La fonction f suivante admet-elle un prolongement par continuité au point x_0 dans les cas qui suivent ;
   - ✍ $f(x)=xE\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0=0$
   - ✍ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{2x}}{\sqrt[4]{x+14}-2}\quad,\quad x_0=2$

Exercice 3 — Les Suites - 8 points

1. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $(\exists\,!x_n\in\mathbb{R}^+)\ \ x_n^{n+1}+2x_n-1=0$
   b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 0\leq x_n\leq\dfrac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^n$
   c) Etudier la monotonie de la suite (x_n)
   d) En déduire que (x_n) est convergente puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.
2. Soit $\alpha\in]0;\pi[$. On considére la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $P_n=\sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)\prod\limits_{k=1}^{k=n}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$
   a) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique.
   b) Calculer $\prod\limits_{k=1}^{k=n}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$ en fonction de n.
3. a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: $(\exists\,!x_n\in]0;1[)\ \ x_n=\cos\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$
   b) Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ et calculer sa limite.