Cours sur: Variables Aléatoires à Densité

Pr. M.Chergui

CRMEF-Départ Maths
Kénitra

23 mars 2020

Plan du Cours

Définition et Propriétés

Définition

Soit X une v.a.r. à valeurs non dénombrables (pas finies et non plus dénombrables).
Si la fonction de répartition F_X de X est une fonction continue (sauf en un nombre fini de points), on dit que X est une v.a.r.continue.
Dans ce cas, la loi de X est déterminée par l'ensemble des probabilités $P(a < X < b)$, pour tous $a < b$.

Exemple

Soit $\alpha > 0$. Considèrons une v.a.r. X de fonction de répartition

$$\begin{cases} F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x} \text{ si } x \geq 0 \\ F_X(x) = 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Vérifier que X est une v.a continue.

Variable aléatoire à densité

Définition

Si l'on peut écrire la fonction de répartition d'une variable continue X sous la forme :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

où f_X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors on dit que X est une v.a à densité et que la fonction f_X est la densité de probabilité de la v.a.r. X.

Remarque1

On a, pour tous $a < b$:

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Cette intégrale étant positive pour tout $a < b$, il en résulte que $f_X \geq 0$. De plus, puisque $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$; on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

Remarque 2

Notons que l'on peut mettre $<$ ou $\leq$ dans ce qui précède car la variable est continue, on a $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition de la densité

Une densité de probabilité est une fonction positive ou nulle, continue sur $\mathbb{R}$ (sauf en quelques points) d'intégrale 1, et qui caractérise la loi d'une v.a.r. continue.
De plus, en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ où F_X est dérivable, on a $f_X(x_0) = F'_X(x_0)$

Exemple

Déterminer la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que la fonction f définie ci-aprés soit une densité, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{x}}, \; 0 < x < 1 \\ 0, x \notin]0, 1[\end{cases}$.

Quelques Régles de Calcul

1. $P(X = a) = 0$
2. $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\, dt$

Quelques Régles de Calcul

1. $P(X = a) = 0$
2. $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,dt$

Quelques Régles de Calcul

1. $P(X = a) = 0$
2. $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\, dt$

Quelques Régles de Calcul

1. $P(X = a) = 0$
2. $P(X < a) = P(X \leq a) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\, dt$

Exercice N° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = ke^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer k pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
3. Calculer $P(1 < X < 2)$.
4. Déterminer les 1^{er} et le $3^{ème}$ quartiles.
   Rappel : Le quantile d'ordre $\alpha \in]0;1[$ est le nombre $x_\alpha \in I$ tel que $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

Exercice N° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = ke^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer k pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
3. Calculer $P(1 < X < 2)$.
4. Déterminer les 1^{er} et le 3^{ème} quartiles.
   Rappel : Le quantile d'ordre $\alpha \in]0;1[$ est le nombre $x_\alpha \in I$ tel que $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

Exercice N° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = ke^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer k pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
3. Calculer $P(1 < X < 2)$.
4. Déterminer les 1^{er} et le $3^{ème}$ quartiles.
   Rappel : Le quantile d'ordre $\alpha \in]0;1[$ est le nombre $x_\alpha \in I$ tel que $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

Exercice N° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = ke^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer k pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
3. Calculer $P(1 < X < 2)$.
4. Déterminer les 1^{er} et le $3^{ème}$ quartiles.
   Rappel : Le quantile d'ordre $\alpha \in]0;1[$ est le nombre $x_\alpha \in I$ tel que $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

Exercice N° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = ke^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer k pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
3. Calculer $P(1 < X < 2)$.
4. Déterminer les 1^{er} et le $3^{\text{ème}}$ quartiles.
   Rappel : Le quantile d'ordre $\alpha \in]0;1[$ est le nombre $x_\alpha \in I$ tel que $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

Définition

Soit une variable aléatoire X de densité f.

1. X a une espérance si l'intégrale $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$ converge.
2. En général, X a un moment d'ordre n si l'intégrale $E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f_X(t)\, dt$ converge.
3. La variable aléatoire X est dite centrée si $E(X) = 0$ et elle est dite réduite si $\sigma(X) = 1$ (i.e $V(X) = 1$).

Exercice N° 2

Soit f la fonction définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ a(x-1)(3-x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer alors $P(X \in [0,2])$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice N° 2

Soit f la fonction définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ a(x-1)(3-x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer alors $P(X \in [0,2])$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice N° 2

Soit f la fonction définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ a(x-1)(3-x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer alors $P(X \in [0,2])$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice N° 2

Soit f la fonction définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ a(x-1)(3-x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer alors $P(X \in [0,2])$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Loi uniforme

Définition

La loi uniforme est la loi exacte de phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle.Si a < b sont deux réels, la loi uniforme sur l'intervalle [a ; b] est notée $\mathcal{U}(a;b)$. Elle a pour densité,

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a;b] \end{cases}$$

Exercice 3

1. Déterminer la fonction de répartition.
2. Calculer $E(\mathcal{U})$ et $V(\mathcal{U})$

Loi uniforme

Définition

La loi uniforme est la loi exacte de phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle.Si a < b sont deux réels, la loi uniforme sur l'intervalle [a ; b] est notée $\mathcal{U}(a; b)$. Elle a pour densité,

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a; b] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a; b] \end{cases}$$

Exercice 3

1. Déterminer la fonction de répartition.
2. Calculer $E(\mathcal{U})$ et $V(\mathcal{U})$

Exrcice 4

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-2; 2]$. On pose $Y = |X|$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y
2. Calculer la densité de Y . Reconnaître cette loi.

Loi exponentielle

Définition

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si la loi de X a pour densité

$$\begin{cases} f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{, si } x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Champs d'Application

La loi exponentielle est utilisée en fiabilité. Le paramètre λ représente le taux moyen de défaillance alors que son inverse est “le temps moyen de bon fonctionnement". La loi exponentielle s'applique bien aux matériels électroniques ou aux matériels subissant des défaillances brutales.

Exercice3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt \quad (k \in \mathbb{N})$. Montrer que $I_k = k!$
2. En déduire la valeur du moment d'ordre k de la variable X. Quelles sont les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$
3. Montrer que $P(X \leq x + x_0 / x > x_0) = P(X \leq x)$ pour tous $x, x_0 > 0$
4. Déterminer le $2^{\text{ème}}$ quartile et le 1^{er} décile.

Exercice3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt \quad (k \in \mathbb{N})$. Montrer que $I_k = k\,!$
2. En déduire la valeur du moment d'ordre k de la variable X. Quelles sont les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$
3. Montrer que $P(X \leq x + x_0 / x > x_0) = P(X \leq x)$ pour tous $x,\ x_0 > 0$
4. Déterminer le $2^{\text{ème}}$ quartile et le 1^{er} décile.

Exercice3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt \quad (k \in \mathbb{N})$. Montrer que $I_k = k\,!$
2. En déduire la valeur du moment d'ordre k de la variable X. Quelles sont les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$
3. Montrer que $P(X \leq x + x_0 / x > x_0) = P(X \leq x)$ pour tous $x,\ x_0 > 0$
4. Déterminer le 2ème quartile et le 1er décile.

Exercice3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt \quad (k \in \mathbb{N})$. Montrer que $I_k = k\,!$
2. En déduire la valeur du moment d'ordre k de la variable X. Quelles sont les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$
3. Montrer que $P(X \leq x + x_0 / x > x_0) = P(X \leq x)$ pour tous $x,\ x_0 > 0$
4. Déterminer le $2^{\text{ème}}$ quartile et le 1^{er} décile.

Exercice3

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt \quad (k \in \mathbb{N})$. Montrer que $I_k = k\,!$
2. En déduire la valeur du moment d'ordre k de la variable X. Quelles sont les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$
3. Montrer que $P(X \leq x + x_0 / x > x_0) = P(X \leq x)$ pour tous $x,\ x_0 > 0$
4. Déterminer le $2^{\text{ème}}$ quartile et le 1^{er} décile.

Loi Normale

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ lorsque pour tout $k \in \mathbb{R}$, $P(X = k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)dx$ avec la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ $\sigma \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$. On la note $\mathcal{N}(m, \sigma)$

Remarque

1. On montre que sa variance et son écart-type vérifient :
   $$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sigma$$
2. On a $f(x+m) = f(x-m)$. Donc, la courbe C_f présente une symétrie par rapport à l'axe vertical d'équation $x = m$.
3. On a $f'(x) = \dfrac{-(x-m)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$

Loi chi-deux χ^2

Définition

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0;1)$. Posons $\chi^2 = \sum_{i=1}^{i=n} X_i^2$. Par définition, la v.a. χ^2 suit une loi du **khi-deux à n degrés de liberté** (abréviation d.d.l.). On note cette loi $\chi^2(n)$.

Propriétés

1. $\chi^2 \geq 0$, donc cette loi n'est pas symétrique,
2. χ^2 admet une densité définie par,
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} \ si \ x > 0 \\ f(x) = 0 \ si \ x \leq 0 \end{cases}$$
3. $E(\chi^2) = n$ et $Var(\chi^2) = 2n$.

La loi de Student

Définition

La loi de Student à n degrés de liberté, est la loi du rapport $\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, où les variables aléatoires X et Y sont indépendantes , X de loi $\mathcal{N}(0,1)$, Y de loi $\chi^2(n)$. On la note T_n.
Sa densité est donnée par,

$$f_{T_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$