CRMEF Kénitra
Département de Mathématiques
Section Collège- Lycée

Année: 2017/2018

Analyse

Contrôle 1

Exrcice 1: 7 points

Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite de réels positifs et $(u_n)_{n\in N}$ la suite de terme général $u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$.

1- On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a > 0$. Vérifier que $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ et montrer que $(u_n)_n$ converge vers $l = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

2- On suppose que $a_n = \lambda^{2^{n+1}}$ avec $\lambda > 0$. Vérifier que $u_n = \lambda\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}$ et montrer que $(u_n)_n$ converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda$.

3- On se propose de montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si la suite $(a_n^{\frac{1}{2^n}})_n$ est bornée.

i. Vérifier que $u_n \geq a_n^{\frac{1}{2^{n+1}}}$.

ii. Déduire que si $(u_n)_n$ converge alors la suite $(a_n^{\frac{1}{2^n}})_n$ est bornée.

iii. Réciproquement montrer que s'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n^{\frac{1}{2^n}} \leq \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)_n$ converge.

Exrcice 2: 7 points

Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 1 - x - \ln(1+x^n)$.
1- Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ telle que $f_n(x_n) = 0$.
2- Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3- En déduire que $(x_n)_{n\in N^*}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite l.
4- Montrer que $l = 1$.

Exrcice 3: 6 points

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ et soit $l = \inf\{\dfrac{u_n}{n} \;/\; n \geq 1\}$. On se propose de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

1- Vérifier par récurrence que $u_{mn} \leq m u_n$.

2- Supposons que $l \neq -\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $l < \frac{u_m}{m} < l + \varepsilon$.

i. Vérifier que pour tout $n \geq m$ on a $u_n \leq q u_m + u_r$ où q et r sont tels que $n = qm + r$ et $0 \leq r < m$.

ii. Montrer que $l \leq \dfrac{u_n}{n} \leq (l+\varepsilon)(1 - \dfrac{r}{n}) + \dfrac{M}{n}$ où $M = \displaystyle\sup_{0\leq k<m} u_k$.

iii. Déduire que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$.

3- Supposons que $l = -\infty$. Soit $A < 0$, il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_m}{m} \leq A$.

i. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \leq A(1 - \dfrac{n}{r}) + \dfrac{M}{n} \leq \dfrac{A}{2}$.

ii. Déduire que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = -\infty$.